

УДК 624.131

DOI: 10.17213/mgvgif/2026-5-433-445

ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛЕНТОЧНЫХ ФУНДАМЕНТОВ СО СТУПЕНЧАТОЙ ПОДОШВОЙ

А. Н. Богомолов¹, О. А. Богомолова², С. А. Богомолов³, А. В. Редин⁴

¹ООО «Научно-проектное экспертно-консультационное предприятие “ОиФ”»,
г. Новосибирск, Россия,

²Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Россия,

³Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, г. Москва, Россия,

⁴АО «Черномортранснефть», База производственного обслуживания,
Участок геологических и инженерно-изыскательских работ, Россия

Аннотация. Приведены результаты конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния однородного основания ленточного фундамента со ступенчатой подошвой, в результате которого описан процесс образования областей пластических деформаций и определены величины критических нагрузок, соответствующие определенным этапам развития ОПД, выполнен расчет осадок ступенчатого фундамента. Полученные результаты были сопоставлены с соответствующими значениями критических нагрузок и осадок, полученных для таких же грунтовых условий при помощи аналогичного расчета для равного по ширине ленточного фундамента с плоской подошвой при разной ее толщине. Установлено, что величины расчетных нагрузок для фундаментов с разными видами подошвы практически одинаковы, а осадки ступенчатого фундамента оказались при всех прочих равных условиях на 37,2 % меньше осадок фундамента с плоской подошвой. Отмечается, что аналогичный результат получен сторонними авторами при проведении экспериментальных исследований. Делается вывод о необходимости проведения исследования работы ступенчатых фундаментов в различных грунтовых условиях.

Ключевые слова: ленточные фундаменты с плоской и ступенчатой подошвой, напряженно-деформированное состояние, области пластических деформаций, критические нагрузки, осадки

ON THE FEASIBILITY OF USING STRIP FOUNDATIONS WITH A STEPPED BASE

A. N. Bogomolov¹, O. A. Bogomolova², S. A. Bogomolov³, A. V. Redin⁴

¹«OiF» Research and Design Expert and Consulting Company LLC, Novosibirsk, Russia

²Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

³Moscow State University of Civil Engineering (National Research University),
Moscow, Russia

⁴JSC «Chernomortransneft», Production Service Base, Geological and Engineering Survey
Department, Russia

Annotation. The article presents the results of a finite element analysis of the stress-strain state of a homogeneous base of a strip foundation with a stepped base. This analysis describes the process of formation of plastic deformation zones and determines the values of critical loads corresponding to specific stages of PDZ development and also includes a settle-

ment calculation for the stepped foundation. All obtained results were compared with the corresponding values of critical loads and settlements obtained for the same soil conditions using an analogous calculation for a strip foundation of equal width but with a flat base of varying thickness. It was established that the calculated load values for foundations with different base types are practically identical, while the settlements of the stepped foundation, all other conditions being equal, were 37.2% less than the settlements of the foundation with a flat base. It is noted that a similar result was obtained by independent researchers during experimental studies. A conclusion is drawn about the necessity of further research into the performance of stepped foundations under various soil conditions.

Keywords: *strip foundations with flat and stepped bases, stress-strain state, zones of plastic deformation, critical loads, settlements*

Введение

Как театр начинается с вешалки, так любое здание гражданского или промышленного назначения начинается с его наиболее ответственной части — фундамента. Эта часть является весьма материалоемкой и трудозатратной, совокупная стоимость «нулевого» цикла зданий с фундаментами мелкого заложения в большинстве случаев составляет 10 % и более стоимости возводимого объекта.

Наиболее распространенными мало заглубленными фундаментами при возведении малоэтажных зданий являются ленточные и отдельно стоящие столбчатые фундаменты [1–3].

В последнее время появилось достаточно много исследований [4–6], посвященных изучению влияния формы подошвы фундаментов (очертания ее горизонтальной проекции) мелкого заложения на распределение напряжений в активной зоне фундамента, несущую способность основания и осадки фундаментной конструкции. Результаты этих исследований показывают, что при рассмотрении конкретных геотехнических задач, отступление от канонических форм подошвы фундаментов мелкого заложения — ленты и прямоугольной плиты — дает возможность подобрать такое ее очертание, которое позволяет при всех прочих равных условиях увеличить несущую способность основания, или уменьшить осадки фундамента, или снизить материалоемкость и трудоемкость строительства нулевого цикла и так далее. Подошвы фундаментов, имеющих такие очертания, будут рациональными только для тех грунтовых условий и внешних нагрузок, которые соответствуют решаемой проектной задаче.

Отметим, аналогично авторам работы [7], что фундаменты можно характеризовать не только геометрической формой отпечатка его тела на горизонтальной поверхности основания (формой подошвы или ее очертанием), но и формой поверхности подошвы (поверхности опирания), которая может быть плоской, выпуклой, вогнутой, ступенчатой и так далее. В подавляющем числе случаев поверхность подошвы фундамента бывает плоской, но в то же время имеется целый ряд работ, где она не является таковой.

Так, в работах [8, 9] рассматриваются фундаменты с выпуклой подошвой, в работах [10–12] — с вогнутой, в работах [13–15] — исследуется напряженно-деформированное состояние оснований штампов с подошвами, имеющими форму части круглого цилиндра, наклонной плоскости и параболической поверхности. В патенте [16] описаны ленточный и круглый фундаменты с круглоцилиндрической и сферической подошвами, а в работах [17, 18] описаны преимущества ступенчатого фундамента. Изображения этих фундаментов приведены на рис. 1.

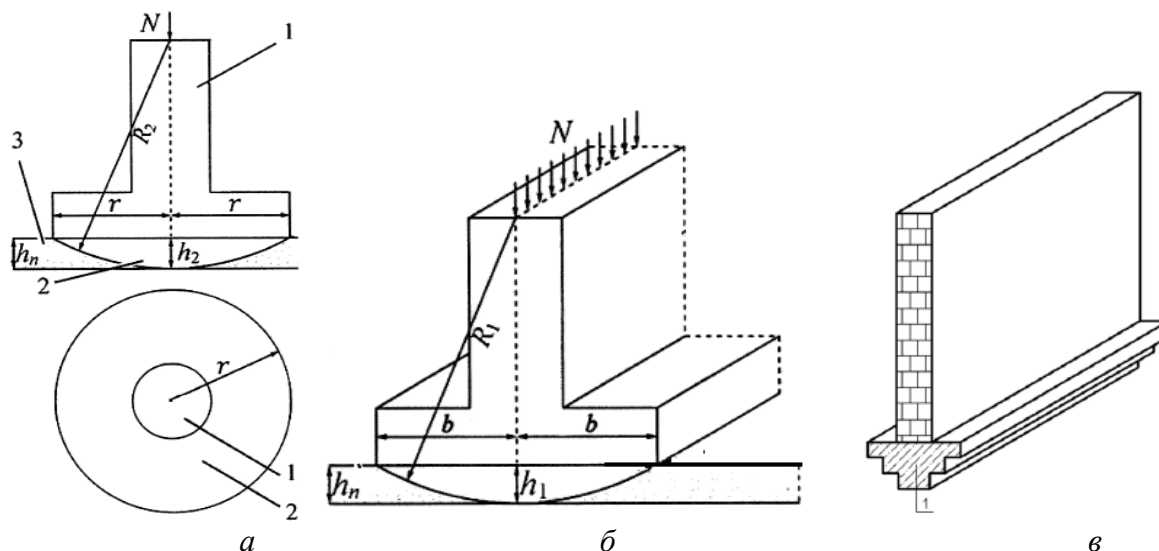


Рис. 1. Круглый (а) и ленточный (б) фундаменты с круглоцилиндрической и сферической формой подошвы, ленточный ступенчатый фундамент (в) [16, 18]

В настоящей работе поставлена задача провести конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) основания ступенчатого фундамента, на основании которого необходимо определить величины расчетного сопротивления, предельно допустимой нагрузки на основание и осадок ступенчатого фундамента, размеры которого приведены на рис. 2а и в [17, рис. 1].

Необходимо провести сравнение численных значений этих величин с аналогичными значениями, полученными для ленточного фундамента соответствующих размеров. Для этого выполнены расчеты всех перечисленных выше величин при условии, что в обоих случаях расчетные конечно-элементные схемы имеют одинаковые геометрические размеры и степень дискретизации, а численные значения физико-механических свойств слагающих грунтов и параметры внешней нагрузки равны.

Материалы и методы

При помощи компьютерной программы *FEA* [19], разработанной авторами, выполнены все необходимые расчеты для ленточных ступенчатого (см. рис. 2) и фундамента с плоской горизонтальной подошвой, ширина которых одинакова.

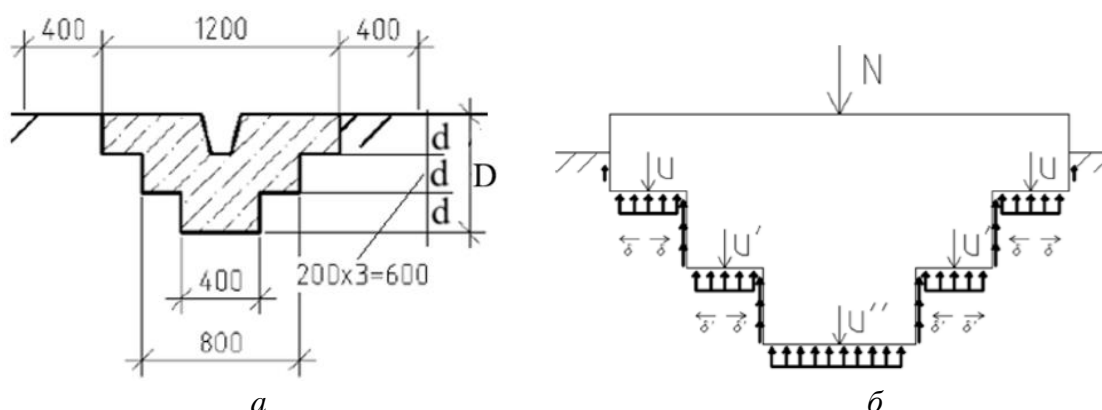


Рис. 2. Геометрические размеры (в мм) фундамента со ступенчатой подошвой и схема его взаимодействия с основанием [17]

Толщина ленточного фундамента h последовательно принимала значения, равные $h = d; 2d; 2d$ (рис. 2а). Очевидно, что при $h = 2d$, объем погонного метра ленточного фундамента будет равен объему погонного метра ступенчатого фундамента, что означает их одинаковую материалоемкость по бетону.

Отметим, что все переменные расчетные параметры кроме тех, что определяют форму поперечного сечения фундаментов, были одинаковыми при проведении всех вариантов расчетов.

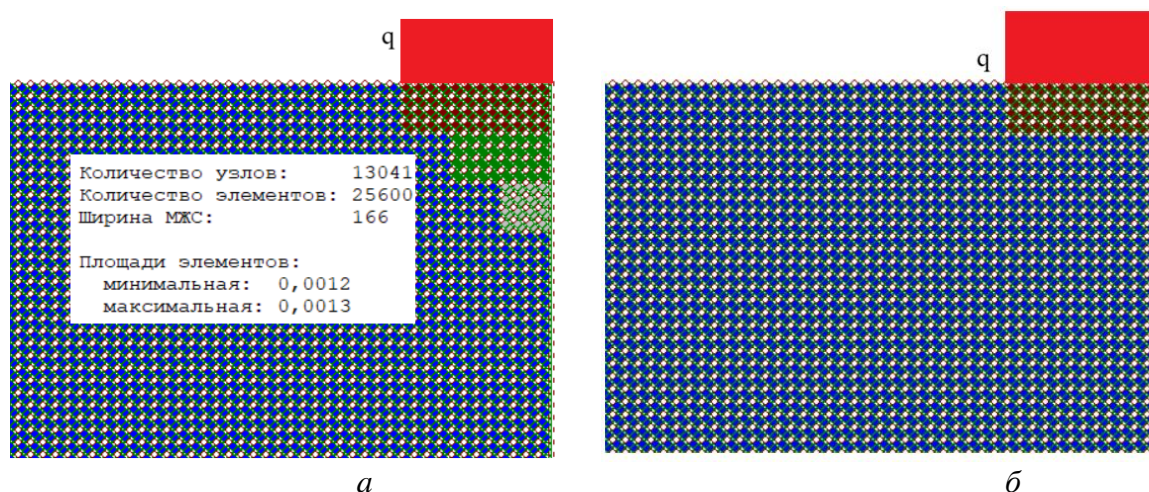


Рис. 3. Фрагменты расчетных схем для фундаментов со ступенчатой (а) и плоской (б) подошвой

Так как вертикальные сечения ленточных фундаментов со ступенчатой и плоской подошвой (плоская задача) симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через их середины, то при конечно-элементном анализе НДС, вычислении критических нагрузок и осадок, достаточно рассмотреть половины фундаментов, составив соответствующие расчетные схемы.

Расчетные схемы (рис. 3) состоят из 25600 одинаковых треугольных элементов, сопряженных в 13041 узле. Наложены тривиальные граничные условия в перемещениях: на вертикальных границах РС невозможны горизонтальные перемещения, а вертикальные не ограничены, на горизонтальной границе, напротив, невозможны вертикальные перемещения, а горизонтальные не ограничены, нижние угловые точка – жестко закреплены. Вертикальный и горизонтальный размеры РС заданы в долях ширины фундамента $L = 1,2$ м (см. рис. 2): ширина расчетной схемы принята равной $8L$, а высота – $6L$, при таких размерах РС, наложенные на нее граничные условия незначительно влияют на результаты вычислений [20]. В точках расчетной схемы, расположенных на поверхности фундаментов, выполняется условие полного прилипания.

При проведении расчетов считаем, что основание сложено суглинком $0,25 \leq I_L \leq 0,5$, $e = 0,45$, удельный вес $\gamma = 18,15$ кН/м³; сцепление $c = 34$ кПа, угол внутреннего трения $\varphi = 23^\circ$, модуль деформации $E_o = 40$ МПа, коэффициент бокового давления $\xi_o = 0,44$.

Считаем, что фундаменты изготовлены из бетона В30, имеющего удельный вес 22 кН/м³, модуль упругости $E = 32,5 \cdot 10^3$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,13$.

Отметим, что вертикальный размер расчетной схемы при вычислении вертикальных перемещений (осадок) фундаментов определен отдельно (см. ниже) из условия его равенства толщине сжимаемой толщи, которая определена согласно п. 5.6.41 СП 22.13330.2026.

Анализ напряженного состояния, вычисление критических нагрузок и осадок

Поля напряжений в активной зоне фундамента

На рис. 4 представлены изображения изолиний трех компонент напряжения, возникающего в активной зоне фундамента с плоской подошвой (рис. 4а–в) и фундамента со ступенчатой подошвой (рис. 4г–е), которые вычислены с учетом жесткости фундаментной конструкции. Как и следовало ожидать в точках контакта фундаментов с грунтом и в угловых точках фундаментов наблюдаются значительные концентрации напряжений, которые, впрочем, достаточно быстро рассеиваются. Форма изолиний всех трех компонент напряжений симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через середину фундамента. Компоненты σ_x и σ_z в соответствующих точках имеют по обе стороны от оси симметрии одинаковые знаки, а компоненты касательного напряжения τ_{zx} – противоположные. Ниже показано, что эти отличия влияют на процесс образования пластических областей в основании фундаментов и их осадки.

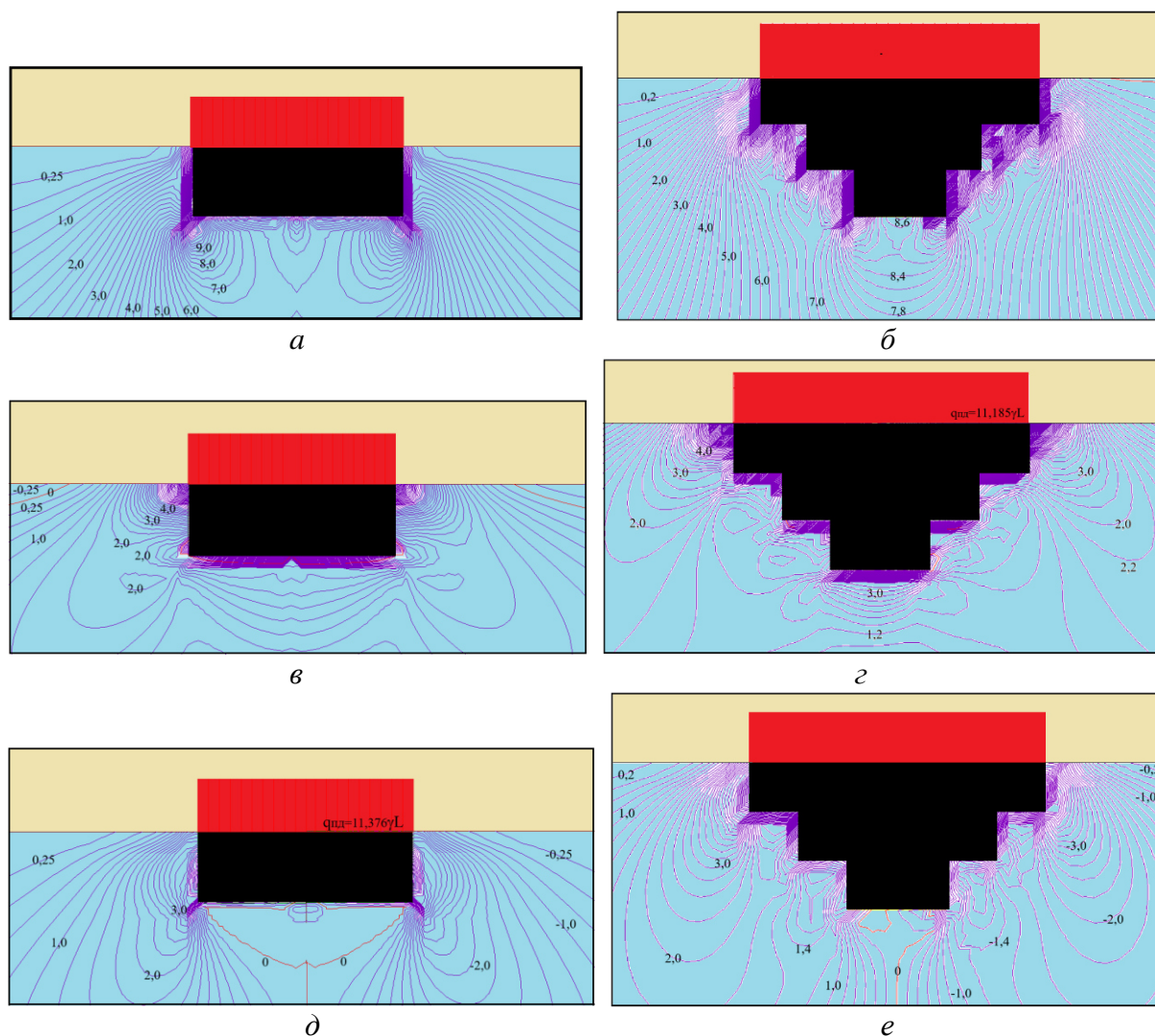


Рис. 4. Изолинии безразмерных (в долях γD) вертикальных σ_z , горизонтальных σ_x и касательных τ_{xz} напряжений в активной зоне ленточных фундаментов одинаковой ширины с плоской (а; б; в) и ступенчатой (г; д; е) подошвой соответственно при величинах интенсивности равномерно распределенной нагрузки, соответствующим ее предельно допустимым значениям

Процесс развития областей пластических деформаций

Предельные нагрузки

Развитие кулоновских областей пластических деформаций [21, 22] под подошвой плоского фундамента проходит по классической схеме: ОПД образуются под угловыми точками и при увеличении нагрузки растут и вверх, достигая дневную поверхность, и вниз под подошву фундамента.

Как это принято, можно выделить две критические нагрузки: расчетное сопротивление R , когда пластические области развиваются на глубину, равную четверти фундамента ($L/4$), и предельно допустимую нагрузку $q_{\text{пл}}$, когда происходит смыкание ОПД под подошвой фундамента (см. рис. 5а,б).

Увеличение глубины развития пластических областей проходит не равномерно – на рис. 5в изображена графическая зависимость вида $z/L=f(q)$, которая, как видно, аппроксимируется с достоверностью 98 % экспоненциальной функцией.

На рис. 5г приведены графические интерпретации зависимостей вида $R=f(d/D)$ и $q_{pr}=f(d/D)$, которые показывают, что величина расчетного сопротивления и предельно допустимо нагрузки практически линейно зависят от толщины фундамента – при увеличении толщины фундаментной ленты от d до $3d = D/2$ (см. рис. 2а) величина R увеличивается на 16,13 %, а величина q_{pd} – на 8,8 %.

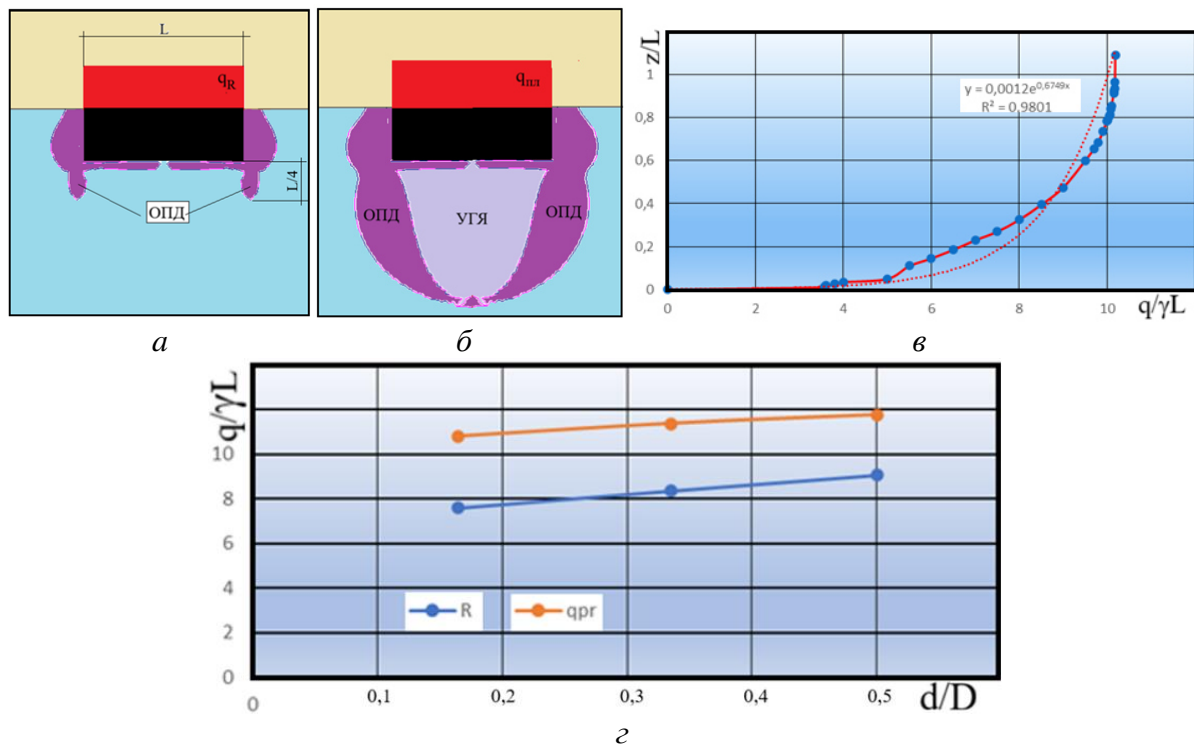


Рис. 5. Области пластических деформаций в основании ленточного фундамента с плоской подошвой при величине интенсивности внешнего воздействия, равном расчетному сопротивлению (а) и предельно допустимой нагрузке (б), графические зависимости глубины развития пластических областей от интенсивности внешнего воздействия (в) и графические зависимости величины расчетного сопротивления $R = f(d/D)$ и предельно допустимой нагрузки $q_{pr} = f(d/D)$ для основания плоского фундамента в зависимости от его толщины

Забегая несколько вперед, отметим, что осадки ленточного фундамента толщиной $2d$, что соответствует равной материалоемкости со ступенчатым фундаментом по бетону (см. выше), при величине нагрузки, равной ее предельно допустимому значению $q_{pd} = 11,376\gamma L$, на 20,89 % больше, чем при нагрузке, соответствующей расчетному сопротивлению $R = 8,35\gamma L$ (см. рис. 6).

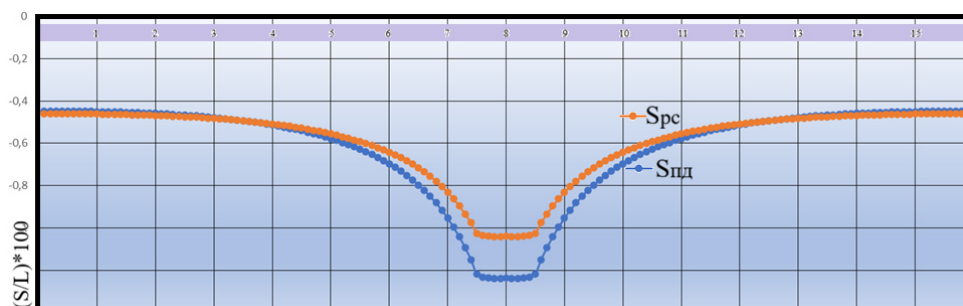


Рис. 6. Эпюры осадок точек (вертикальных перемещений), расположенных на прямой, касательной к плоской подошве ленточного фундамента при величинах интенсивности внешней нагрузки равных величине расчетного сопротивления S_{pc} и предельно допустимой нагрузке S_{pd}

Развитие пластических областей под подошвой ступенчатого фундамента, по нашим расчетам, отличается от соответствующей картины, описанной в работе [17] (см. рис. 7а).

Сначала, при нагрузке равной $q = 2,7\gamma L$, ОПД зарождаются под нижними угловыми точками ступенчатого фундамента (область 1, см. рис. 7б). Затем при $q = 3,05\gamma L$ развитие пластических областей начинается в области 2, при $q = 3,7\gamma L$ – в области 3 и, наконец, при $q = 4,6\gamma L$ – в области 4. В случае ступенчатого фундамента невозможно определить величину расчетного сопротивления R из условия развития ОПД под краями фундамента на глубину $L/4$, так как при этом значении q области пластических деформаций под другими угловыми точками фундамента развиты на гораздо большую глубину.

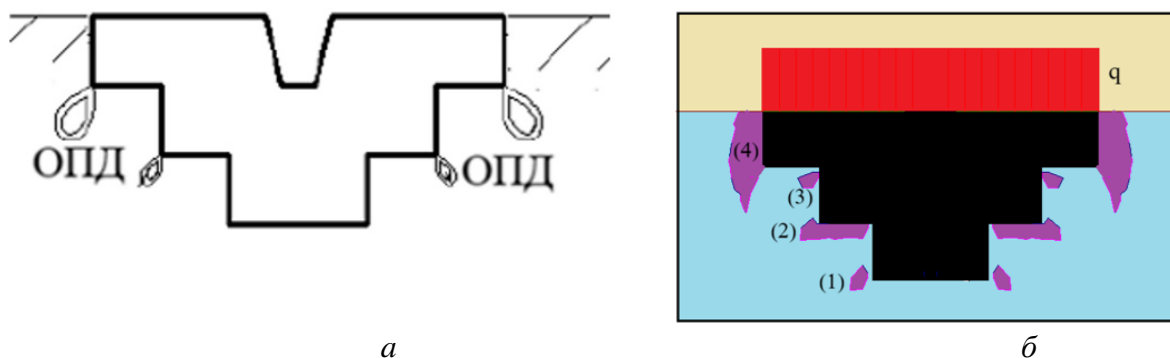


Рис. 7. Процесс зарождения областей пластических деформаций в основании ступенчатого фундамента по версии работы [17] (а) и по версии компьютерной программы FEA [19] (б)

На рис. 8 приведены изображения областей пластических деформаций, которые образуются в активной зоне основания фундамента со ступенчатой подошвой при различных значениях интенсивности внешнего воздействия, причем, ОПД на рис. 8б соответствует величине интенсивности внешней нагрузки, равной ее предельно допустимому значению $q = 11,185\gamma L$.

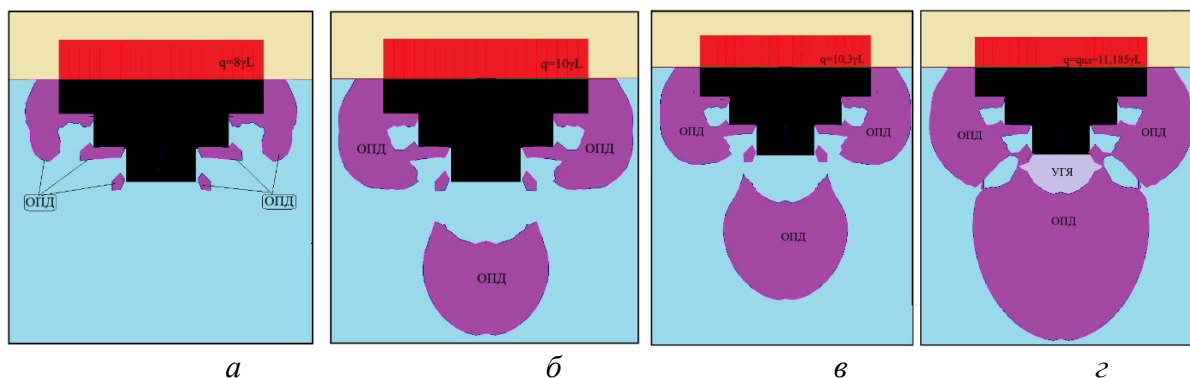


Рис. 8. Области пластических деформаций под подошвой ступенчатого фундамента при величинах интенсивности внешней равномерно распределенной нагрузки $q = 8\gamma L$ (а), $q = 10\gamma L$ (б), $q = 10,3\gamma L$ (в) и $q = q_{\text{пд}} = 11,185\gamma L$

Расчеты показали, что в этом случае нижняя точка границы пластической области находится на глубине $1,62L$, а соответствующая точка в случае плоского фундамента – на глубине $1,21L$ (рис. 5б). Величины предельно допустимых нагрузок, равные соответственно $q_{\text{пд}}^{\text{ступ}} = 11,185\gamma L$ и $q_{\text{пд}}^{\text{плос}} = 11,376\gamma L$ для фундаментов со ступенчатой и плоской подошвой, отличаются всего на 1,7 %, причем, предельно допустимая нагрузка для основания ступенчатого фундамента меньше (см. рис. 9).

Осадки фундаментов

Для корректного определения осадок фундаментов до начала вычислений необходимо определить мощность сжимаемой толщи, которая определяется, как уже отмечалось выше, согласно п. 5.6.41 СП 22.13330.2026.

В результате вычислений при помощи программы *FEA* [19] для расчетной схемы, изображенной на рис. 3б, построены эпюры вертикальных напряжений от действия собственного веса грунта и внешней нагрузки, равной $q_{\text{пд}}^{\text{плос}} = 11,376\gamma L$ (рис. 9а), при условии, что фундаментная лента отсутствует (масштаб выбран таким образом, чтобы размеры рисунка были оптимальны, а сам рисунок читабельным). Исходя из выполнения условия $q_{\sigma} = 0,5q_{\gamma}$, мощность сжимаемой толщи определена равной $Z_{\text{ст}} = 4,2$ м.

Изменив вертикальный размер расчетной схемы, который при расчетах напряжений и построении ОПД был равен $6L = 7,2$ м, на $Z_{\text{ст}}$, построены эпюры осадок точек (вертикальных перемещений) расположенных на прямых, касательных к плоской подошве ленточного фундамента при его толщине равной d , $2d$, $3d$ – S_d , S_{2d} и S_{3d} соответственно и к подошве ступенчатого фундамента — $S_{\text{ст}}$ $q_{\text{пд}}^{\text{плос}} = 11,376\gamma L$ (б), которые приведены на рис. 9б. Анализ результатов вычислений показал, что максимальная осадка (осадка середины подошвы) ленточного фундамента с толщиной ленты равной $D/6 = d = 0,2$ м составляет $S_d = 1,49$ см; толщиной $2d$ – $S_{2d} = 1,42$ см и $3d$ – $S_{3d} = 1,23$ см. Максимальная осадка фундамента со ступенчатой подошвой равна $S_{\text{ст}} = 1,07$ см. Если сравнить величины осадок фундаментов со

ступенчатой подошвой и равного ему по материалоемкости фундаменту с плоской подошвой толщиной $2d$, то окажется, что осадки последнего больше осадки ступенчатого фундамента на 32,7 %.

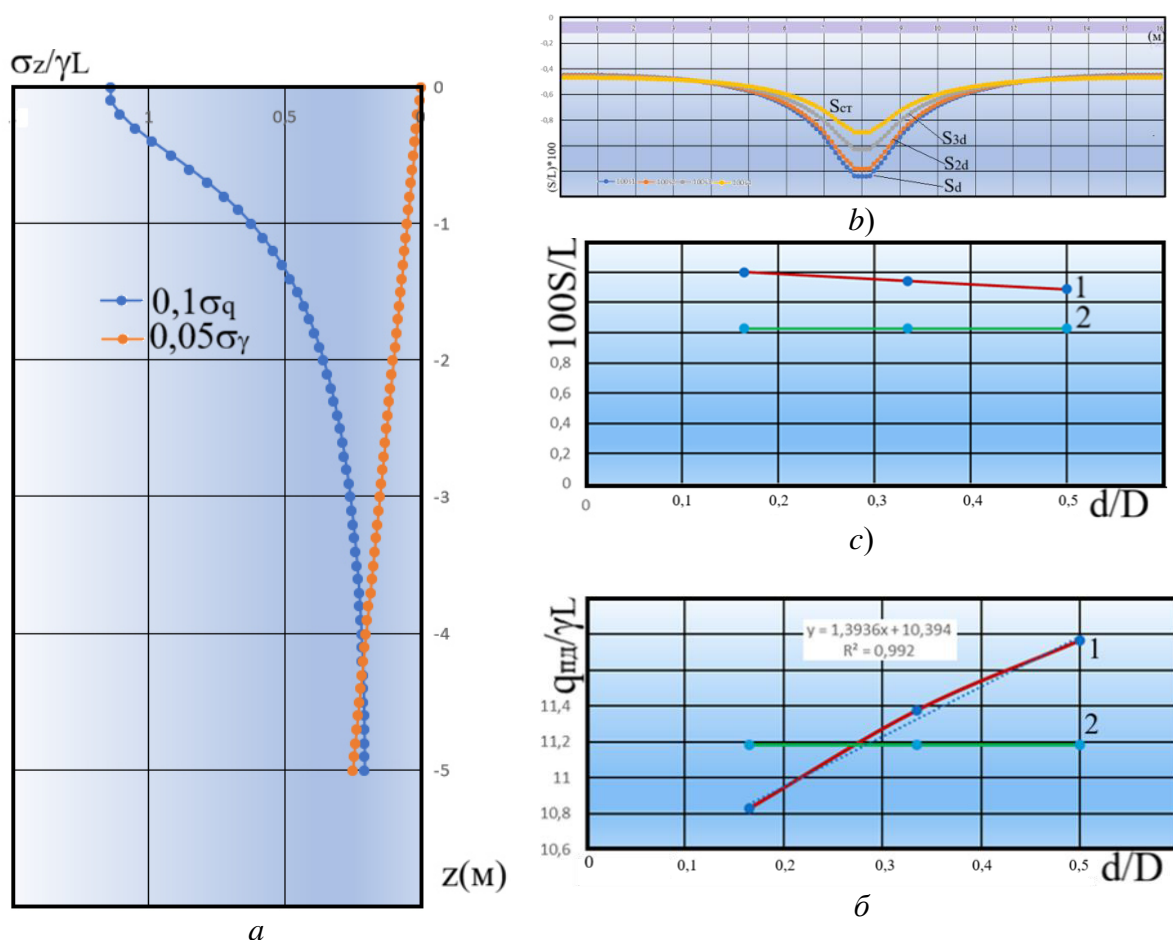


Рис. 9. Эпюры вертикальных напряжений для определения мощности сжимаемой толщи (а); эпюры осадок точек (вертикальных перемещений), расположенных на прямых, касательных к плоской подошве ленточного фундамента при его толщине равной d , $2d$, $3d$ – S_d ; S_{2d} и S_{3d} соответственно и к подошве ступенчатого фундамента – $S_{ст}$ $q_{pd}^{плос} = 11,376\gamma L$ (б); графические зависимости вида $S = f(d/D)$ и $S = const$ для фундаментов с плоской 1 и ступенчатой 2 подошвой с и графические зависимости вида $q_{pd} = f(d/D)$ и $q_{pd} = const$ для фундаментов с плоской 1 и ступенчатой 2 подошвой d

Этот результат качественно согласуется с результатами экспериментальных исследований, приведенных В работе [18] приведены результаты лабораторных экспериментов и натурных испытаний по определению осадок моделей и реальных отдельно стоящих фундаментов с плоской и ступенчатой подошвой. Отмечается «что по результатам моделирования фундаменты со ступенчатой подошвой в зависимости от геологических условий, способа моделирования грунта и собственной геометрии продемонстрировали меньшую осадку (от 6 % до 28 %) по сравнению с фундаментами с плоской подошвой» (цитата). По итогам натурных испытаний

заявлено, что «фундамент с плоской подошвой на последней ступени испытаний сел на величину — 70,67 мм; фундамент со ступенчатой подошвой продемонстрировал осадку — 49,32 мм. Так, при прочих равных условиях фундамент со ступенчатой подошвой продемонстрировал осадку на 30,2 % меньше стандартного фундамента» (цитата).

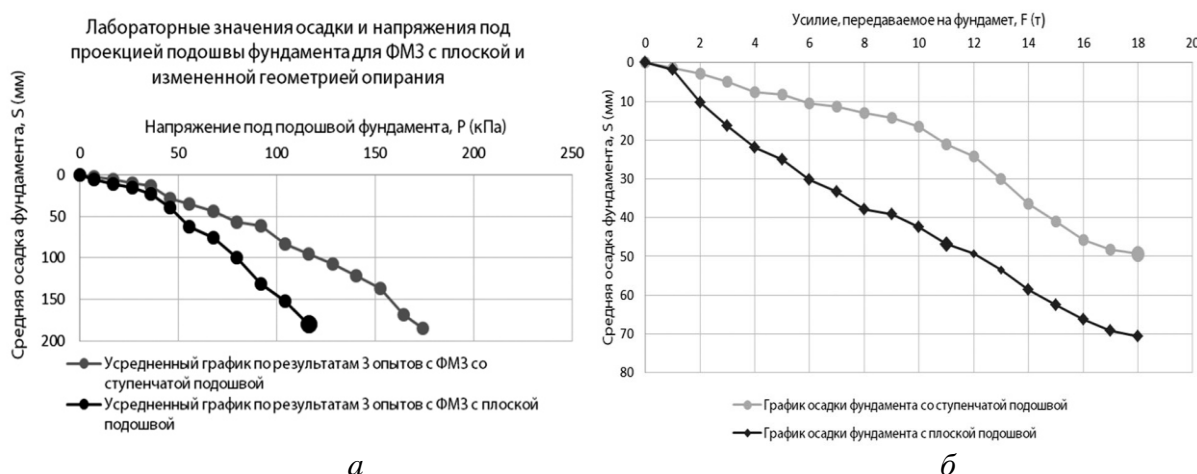


Рис. 10. Результаты лабораторного эксперимента (а) и натурного (б) экспериментов [18]

Эти экспериментальные данные находятся в соответствии с результатами выполненных авторами вычислений, которые говорят что осадки фундаментов с плоской подошвой на 37,2 % больше осадок фундамента со ступенчатой подошвой.

Закключение

Анализируя приведенные выше результаты сопоставительных расчетов, выполненных для конкретных условий, можно отметить следующее:

Изолинии всех компонент напряжения в активной зоне фундаментов имеют классические конфигурации. Численные значения напряжений в соответствующих точках активной зоны обоих фундаментов сопоставимы по величине.

Последовательность развития областей пластических деформаций под подошвой ступенчатого фундамента существенно отличается от той, что изображена на рис. 1 работы [17].

В случае ступенчатого фундамента невозможно определить величину расчетного сопротивления R из условия развития ОПД под краями фундамента на глубину, равную одной четверти его ширины ($L/4$), так как при этом значении q области пластических деформаций под другими угловыми точками фундамента развиты на гораздо большую глубину.

Численные значения величин предельно допустимых нагрузок на основание ступенчатого фундамента и ленточного фундамента, равному последнему по материалоемкости (толщина бетонной ленты $2d$), практически

одинаковы и составляют соответственно $q_{\text{пд}}^{\text{ступ}} = 11,185\gamma L$ и $q_{\text{пд}}^{\text{плос}} = 11,376\gamma L$. Разница составляет всего 1,7 %, причем, предельно допустимая нагрузка для основания ступенчатого фундамента меньше.

Максимальная осадка ленточного фундамента со ступенчатой подошвой на 32,7 % меньше осадки равного по материалоемкости ленточного фундамента с плоской подошвой. Возможно, это объясняется тем, что погонная площадь поверхности подошвы ступенчатого фундамента (ленты длиной 1 м) на 20 % больше соответствующей площади для ленточного фундамента толщиной $2d$ с плоской подошвой.

Учитывая вышесказанное, можно утверждать, что единственным преимуществом ступенчатого фундамента, выявленным для рассмотренных в статье условиях, является меньшая величина осадок. Этот результат качественно совпадает с результатами лабораторных и натурных испытаний, итоги которых опубликованы в работе [18]. Тем не менее считаем, что вопрос о целесообразности практического использования ленточных и отдельно стоящих фундаментов со ступенчатой подошвой требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований.

Список источников

1. Маклакова, Т. Г. Конструкции гражданских зданий: учебник / Т. Г. Маклакова, С.М. Нанасова. – М.: изд-во АСВ, 2002. – 272 с.
2. Сират, Д. Методика выбора эффективных технологии устройства фундаментов для малоэтажных зданий // Актуальные исследования. – 2023. – № 11 (141). – Ч. I. – С. 40-42. URL: <https://apni.ru/article/5810-metodika-vibora-effektivnikh-tekhnologii-ustr>.
3. Алексеев, С. И. Механика грунтов. Основания и фундаменты / С. И. Алексеев. – Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2019. – 180 с.
4. Бай, В. Ф. Повышение эффективности фундаментов мелкого заложения / В. Ф. Бай, В. С. Сафарян. – DOI 10.31660/2782-232X-2022-1-65-72. – Текст: непосредственный // Архитектура, строительство, транспорт. – 2022. – № 1 (99). – С. 65-72.
5. Рыбин, В. С. Определение оптимальной формы и размеров подошвы внецентренно нагруженных фундаментов мелкого заложения / В. С. Рыбин, Л. В. Рыбина. – Текст: непосредственный // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 1. – С. 6-9.
6. Экспериментальные исследования влияния поверхности нагружения на деформации глинистого основания / В. М. Чикишев, Я. А. Пронозин, Р. В. Мельников, Л. Р. Епифанцева // Науч.-техн. жур. Вестник ТГАСУ. – Томск, 2010. – № 2. – С. 199-204.
7. Баданин, А. Н. Анизотропные фундаменты мелкого заложения / А. Н. Баданин, Ю. К. Демченко // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 3 (18). – 2014. – 117-134 с.
8. Грицук, М. С. Рациональные конструкции плитных фундаментов / М. С. Грицук. – Брест: БПИ, 1997. – 218 с.
9. Грицук, М. С. Действие жесткого штампа с выпуклой поверхностью опирания на грунтовое основание / М. С. Грицук, С. С. Даркович // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1980. – № 6. – С. 17-20.
10. Тетиор, А. П. Об устойчивости основания под фундаментами с криволинейной формой подошвы / А. П. Тетиор // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1969. – № 5. – С. 14.

11. Тер-Мартirosян, З.Г. Ленточные фундаменты мелкого заложения, объединенные пологими оболочками, на сильносжимаемых грунтах / З. Г. Тер-Мартirosян, Я. А. Пронозин, Н. Ю. Киселев – Текст: непосредственный // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2014. – № 4. – С. 2-6.
12. Тер-Мартirosян, З. Г. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных по прогнозу осадки крупномасштабной модели ленточно-оболочечного фундамента / З. Г. Тер-Мартirosян, Я. А. Пронозин, Л. Р. Епифанцева, О.С. Порошин // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2. – С. 209.
13. Богомолов, А. Н. О напряжённом состоянии упругой полуплоскости в случае равномерно распределённой нагрузки, приложенной к штампу с закруглённым основанием при учёте трения по контакту «штамп – грунт» / А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков // Вестник МГСУ. – 2016. – № 7. – С. 46-56.
14. Богомолов, А. Н. Распределение напряжений в упругой полуплоскости и по её контакту с центрально нагруженным абсолютно жёстким штампом параболического очертания при условии их полного прилипания / А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков // Будівельні конструкції: міжвідом. наук.-техн. зб. Вип. 83: Механіка ґрунтів, геотехніка та фундаментобудування / Державний науково-дослідний ін-т будівельних конструкцій. – Київ, 2016. – Кн. 1. – С. 366-374.
15. Богомолов, А. Н. О распределении напряжений в основании наклонного абсолютно жесткого штампа при учете трения по контакту «штамп-грунт» / А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков, О. А. Богомоллова // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2014. – № 4. – 7-12.
16. Патент № 2 655 453 С1 Российская Федерация, МПК E02D 27/01 (2006.01). фундамент с круглоцилиндрической поверхностью: заявл. 06.06.2017; опубл. 28.05.2018 / А. В. Пилягин, М. В. Пилягин; заявитель М. В. Пилягин.
17. Отдельно стоящие фундаменты со ступенчатой подошвой / В. С. Сафарян, В. Ф. Бай, А. Н. Коркишко, М. С. Чухлатый // Инженерный вестник Дона. – №3 (2019) ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2019/5870.
18. Сафарян, В. С. Отдельно стоящий фундамент со ступенчатой подошвой: результаты натурного эксперимента / В. С. Сафарян. – DOI 10.31660/2782-232X-2023-4-17-25. // Архитектура, строительство, транспорт. – 2023. – № 4 (106). – С. 17-25.
19. Богомолов А. Н., Богомоллова О. А., Редин А. В., Ушаков А. Н. FEA. Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617889. 23 июля 2015 года. URL: https://vgasu.ru/upload/files/patent/2015_sv2015617889.pdf.
20. Назначение размеров расчетных схем при компьютерном моделировании напряженного состояния основания плитного фундамента на основе метода конечных элементов / Л. А. Бартоломей, О. А. Богомоллова, В. Д. Гейдт, А. В. Гейдт // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2023. – № 2(91). – С. 5-17. – EDN NALXDF.
21. Coulomb C.A. Application des riles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture. Memories de savant strangers de L'Academiie des sciences de Paris, Paris, France. 1773г.
22. Coulomb C.A., Essai sur une application des regles de maximis et minimis quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture. Memoires de Mathematique de l'Academie Royale de Science, Vol. 7, pp. 343-387 1776г.